Trinôme du second degré.
Equation du second degré.

I) Trinôme du second degré :

1) Définition

On appelle fonction trinôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$f : x \mapsto a x^2 + b x + c$ avec a, b et c réels et $a \neq 0$.

On dit que $a x^2 + b x + c$ est un polynôme du second degré ou un trinôme du second degré.

Exemple :

Soit f, g , h et j les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2$, $g(x) = 3x^2 - 5x + 2$, $h(x) = (x + 1)(3 - x)$, $j(x) = 3x^2 + x$

sont des fonctions polynômes du second degré.

Contre exemples :

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$

n'est pas une fonction polynôme du second degré car en simplifiant on trouve $f(x) = 4x$.

g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 4$

h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (\cos x)^2 + \cos x + 1$.

ne sont pas non plus des trinômes du second degré.

2) Forme canonique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, un polynôme du second degré.

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x, on a $f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$

Or $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

Donc $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

et enfin $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

Cette écriture s'appelle forme canonique du trinôme .

Exemple 1: Soit $f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2}$. Ecrire le trinôme $f(x)$ sous forme canonique**.**

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2}$ donc $f(x) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}$ et enfin

$\boldsymbol{f(x) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{3}{4}}$

Exemple 2 : Ecrire le trinôme $g(x)$ sous la forme canonique : $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 5$

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 5$ donc $g(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 10)$ ou encore

$g(x) = -\frac{1}{2}[(x-1)^2 - 1 - 10]$ et enfin :

$\boldsymbol{g(x) = -\frac{1}{2}[(x-1)^2 - 11]}$

II Equation du second degré : a x ² + b x + c = 0 avec a ≠ 0 .

1) Discriminant

Le réel $b^2 - 4ac$ se note Δ et s'appelle le discriminant du trinôme : $ax^2 + bx + c$

On a donc . $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Exemples :

- Calculer le discriminant de $3x^2 - 5x + 1$:

Réponse : $\Delta = (-5)^2 - 4(3)(1)$

$\boldsymbol{\Delta = 13}$

- Calculer le discriminant de $x^2 - 3x + \frac{3}{2}$:

Réponse : $\boldsymbol{\Delta = 3}$

- Calculer le discriminant de $\frac{1}{2}x^2 + x + 5$:

Réponse : $\boldsymbol{\Delta = -9}$

2) Equation du second degré : a x ² + b x + c = 0 avec a ≠ 0 .

Soit $a\,x^2 + b\,x + c$ un polynôme du second degré (a ≠ 0) et
$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ son discriminant.

L'existence de solutions pour l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ et la factorisation du polynôme dépendent du signe de Δ .

Si $\Delta > 0$	Si $\Delta = 0$	Si $\Delta < 0$
l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ admet deux solutions distinctes dans R : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$ **et** $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$ **Le trinôme se factorise de la façon suivante :** $f\,(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$	**l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ admet une solution unique dans R :** $x_0 = \dfrac{-b}{2\,a}$ **Le trinôme se factorise de la façon suivante :** $f\,(x) = a\,(x - x_0)^2$	**l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ n'admet pas de solution dans R** **$f(x)$ n'est pas factorisable en produit de facteurs du premier degré à coefficients réels.**

Remarques :

- On appelle **racine** du polynôme $a\,x^2 + b\,x + c$ toute solution de l'équation :
  $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

- Si le polynôme admet deux racines x_1 et x_2 distinctes ou confondues, alors :

  leur somme $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

  leur produit P = $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

- Lorsque l'équation admet une solution unique x_0 , c'est-à-dire lorsque $\Delta = 0$, on dit que x_0 est une solution double, car elle a deux fois la même solution et $f\,(x) = a\,(x - x_0)^2$.

Exemples :

Déterminer si les polynômes suivants admettent des racines ;
si oui en donner une factorisation.

1) $f\,(x) = x^2 - x - 6$;
2) $g\,(x) = 5x^2 - 40x + 35$;
3) $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$;
4) $j\,(x) = x^2 - x + 1$;
5) $x \in \mathbb{R},\ k(x) = x^2 \pm mx + (m-1)$

Réponses :

- **Pour *f*** :

Δ = 25
le polynôme admet 2 racines – 2 et 3 ,
on a donc : $f(x) = (x + 2)(x - 3)$;

- **Pour *g*** :

Tout d'abord factorisons par 5 : $g(x) = 5\,(x^2 - 8x + 7)$
Δ= 36
le polynôme admet 2 racines : 1 et 7 ,
on a donc : $g(x) = 5(x - 1)(x - 7)$;

- **Pour *h*** :

Δ = 0
le polynôme admet une racine $\frac{1}{3}$,
on a donc : $h(x)$ = 9 $(x - \frac{1}{3})^2$;

- **Pour *j*** :

Δ = – 3
le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$ et n'est pas factorisable ;

- **Pour *k*** :

$\Delta = m^2 - 4\,(m-1) = (m-2)^2$
le polynôme admet une racine si $m = 2$ et deux racines si $m \neq 2$